$\int_0^1 e^{-nx}dx \le K_n \le 2\int_0^1 e^{-nx}$

Or $\int_0^1 e^{-nx}dx = \left[\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \left[-\frac{e^{-n}}{n}+\frac{1}{n}\right] = \frac{1-e^{-n}}{n}$

D'où : $\frac{1-e^{-n}}{n} \le K_n \le 2\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right)$

c/ on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{ne^n} = 0$

D'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_n = 0}$

Exercice 11

$n\in\mathbb{N}^* : J_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$

1) a/*/ $J_0 + J_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$

$= \int_0^1\left(\frac{1}{1+e^t}+\frac{e^t}{1+e^t}\right)dt = \int_0^1\left(\frac{1+e^t}{1+e^t}\right)dt = \int_0^1 dt = 1$

*/ $J_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt = \int_0^1 \frac{(1+e^t)'}{1+e^t}dt$

$= \left[\ln\left(1+e^t\right)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2$ $\boxed{J_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

On a: $J_0 + J_1 = 1 \Leftrightarrow J_0 = 1 - J_1$

D'où : $\boxed{J_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

b/ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a: $(n+1)t \ge nt, t\in[0,1]$

$\Leftrightarrow e^{(n+1)t} \ge e^{nt} \Leftrightarrow \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} \ge \frac{e^{nt}}{1+e^t}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} \ge \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}$

D'où $J_{n+1} \ge J_n$ et par suite (J_n) est croissante

2) on a : $0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 1 \le e^t \le e$

$\Leftrightarrow 1 \le e^t \le e \Leftrightarrow 2 \le 1+e^t \le 1+e, e+1 \le 4$

$\Leftrightarrow 2 \le 1+e^t \le 4$

et par suite $\frac{1}{4} \le \frac{1}{e^t+1} \le \frac{1}{2}, \forall t\in[0,1]$

b/ on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[0,1]$ $\frac{e^{nt}}{4} \le \frac{e^{nt}}{1+e^t} \le \frac{e^{nt}}{2}$

Intégrant les trois membres de l'inégalité on trouve :

$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{4}dt \le J_n \le \int_0^1 \frac{e^{nt}}{2}dt \Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 e^{nt}dt \le J_n \le \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nt}dt$

Or $\int_0^1 e^{nt}dt = \left[\frac{e^{nt}}{n}\right]_0^1 = \frac{e^n}{n} - \frac{1}{n}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^* : \frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right) \le J_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)$

c/ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\times\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n} = +\infty$

et $J_n \ge \frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = +\infty}$

($\frac{e^n}{n} \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$)

Exercice 12

$0 < U_0 < V_0$, $\begin{cases} U_nV_n = U_0V_0 \\ V_n = \frac{1}{2}(U_{n-1}+V_{n-1}), n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

1)i) pour $n=0$

$U_0 > 0$ et $V_0 > U_0 > 0$ Vrai

ii) supposons que $U_n > 0$ et $V_n > 0$

et montrons que $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} > 0$

en effet : $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n+V_n) > 0$ car $U_n + V_n > 0$

Aussi on a : $U_{n+1}V_{n+1} = U_0V_0 > 0$

et $V_{n+1} > 0$ donc $U_{n+1} > 0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N} : U_n > 0$ et $V_n > 0$

2) a/ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn